# TENTAMEN GRONDSLAGEN VAN DE WISKUNDE A

17 DECEMBER 2024, 09:30–12:30

Dit tentamen bevat 5 opgaven; zie ook de ommezijde.[1]

Gebruik voor iedere opgave een apart blad, met voor- en achternaam.

Alle opgaven tellen even zwaar (10 punten); je cijfer is het totaal aantal punten, gedeeld door 5. Als een opgave uit meerdere onderdelen bestaat, staat bij elke deelopgave hoeveel van de 10 punten dat deel waard is.

Advies: maak eerst die opgaven, die je kunt; en ga dan nadenken over de rest. Succes!

If you prefer to write your answers in English, that is fine.

**Opgave 1 (nieuw blad!)** Zij $X$ de verzameling van functies $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Definieer op $X$ de equivalentierelatie $\sim$ door:

$$f \sim g \quad \overset{\text{def}}{\iff} \quad \{n \in \mathbb{N} \mid f(n) \neq g(n)\} \text{ is eindig}$$

(Je hoeft niet aan te tonen dat dit een equivalentierelatie is.) We beschouwen nu de verzameling $X/{\sim}$ van equivalentieklassen. Is deze verzameling aftelbaar of overaftelbaar?

**Antwoord.** Deze verzameling is overaftelbaar. Stel dat $\alpha\colon \mathbb{N} \to X/{\sim}$ een aftelling is. Zij $f$ een lift $\mathbb{N} \to X$ (mbv keuzeaxioma). We noteren $f_i = f(i)$. Definieer nu de functie

$$\begin{aligned} g\colon \mathbb{N} &\to \mathbb{N} \\ n &\mapsto 1 + \max_{0 \leq i \leq n} f_i(n) \end{aligned}$$

Dan geldt voor iedere $i \in \mathbb{N}$:

$$\{j \in \mathbb{N} \mid j \geq i\} \subseteq \{n \in \mathbb{N} \mid f_i(n) \neq g(n)\}$$

Dus deze verzameling is oneindig, en daarom geldt $\not(f_i \sim g)$ voor alle $i$. Dus is $\alpha$ geen aftelling, en daarmee is $X/{\sim}$ overaftelbaar. □

**Opgave 2 (nieuw blad!)** In deze opgave is een *graaf* een verzameling $X$ met een relatie $R \subseteq X \times X$. Als $x, y \in X$, dan is een *pad* een rijtje

$$(x = x_0, \ldots, x_n = y)$$

met $n \geq 0$, zodat voor iedere $i < n$ geldt $(x_i, x_{i+1}) \in R$ of $(x_{i+1}, x_i) \in R$. Een graaf $(X, R)$ is *samenhangend* als voor alle $x, y \in X$ er een pad is van $x$ naar $y$. Een graaf is een *boom* als tussen ieder tweetal $x, y \in X$ precies één pad bestaat. (Merk op dat $(x)$ een pad is van $x$ naar $x$.) Een *deelgraaf* van $(X, R)$ is een paar $(X', R')$ met $X' \subseteq X$ en $R' \subseteq R$. Een deelgraaf $(X', R')$ van $(X, R)$ is een *opspannende boom* als $X' = X$ en $(X', R')$ een boom is.

Laat zien dat elke samenhangende graaf een opspannende boom heeft. (Hint: gebruik het Lemma van Zorn.)

**Antwoord.** Zij $(X, R)$ een samenhangende graaf. Dan is de verzameling

$$\{(X', R') \mid (X', R') \text{ is een boom, en deelgraaf van } (X, R)\}$$

[1]Zie ommezijde / please turn page

op natuurlijke wijze geordend door inclusie.

We willen Zorn toepassen. Zij $(X_i, R_i)$ een keten in deze verzameling. Dan is $(X', R') = (\bigcup_i X_i, \bigcup_i R_i)$ een bovengrens.

- Dit is duidelijk een deelgraaf.
- Dit is een boom. Stel namelijk dat er $x, y \in \bigcup_i X_i$ bestaan zodat er twee verschillende paden van $x$ naar $y$ in $(X', R')$ bestaan. Deze paden hebben eindig veel componenten. Dus bestaat er een $(X_i, R_i)$ die al deze componenten bevat. Dat kan niet, omdat alle elementen in de keten bomen zijn.
- Het is ook duidelijk een bovengrens.

Wegens Zorn heeft bovenstaande verzameling dus een maximaal element. Dit maximale element $(X_0, R_0)$ is een opspannende boom. Zo niet, dan bestaat er een $x \in X$ zodat $x' \notin X_0$. Als $X_0 = \varnothing$, dan is $(\{x\}, \{(x, x)\}$ een grotere boom, tegenspraak. Als $X_0 \neq \varnothing$, dan bestaat er een $y \in X_0$. Omdat $(X, R)$ een samenhangende graaf is, bestaat er een pad

$$(x = x_0, x_1, \dots, x_k = y)$$

in $(X, R)$. Zij nu $i \leq k$ zo groot mogelijk met de eigenschap dat $x_i \notin X_0$. Neem zvva aan dat $(x_i, x_{i+1}) \in R$. (Het geval $(x_{i+1}, x_i) \in R$ is volstrekt analoog.)

Dan is $(X_0 \cup \{x_i\}, R_0 \cup \{(x_i, x_{i+1})\}$ een grotere deelgraaf, die ook een boom is. Het toevoegen van 1 zijde, naar een nieuw punt, kan niet meerdere verschillende paden introduceren. Dus uit maximaliteit volgt $X_0 = X$, en daarmee is $(X_0, R_0)$ een opspannende boom. $\square$

**Opgave 3 (nieuw blad!)** Laat $X$ en $Y$ wel-geordende verzamelingen zijn. Een functie $f\colon X \to Y$ is *dalend* als voor alle $x, x' \in X$ de volgende implicatie geldt: $x \leq x' \implies f(x) \geq f(x')$.
(Hint: onderdeel (c) is onafhankelijk van onderdeel (a) en (b).)

(a) (2 punten) Laat zien dat iedere dalende functie $\mathbb{N} \to X$ eindig beeld heeft.
(b) (3 punten) Laat zien dat iedere dalende functie $X \to Y$ eindig beeld heeft.
(c) (5 punten) Zij $X$ een verzameling. Toon aan dat er een wel-geordende verzameling $Y$ bestaat zodanig dat

$$|X| \leq |\{y \in Y \mid y \text{ is een limietpunt van } Y\}|$$

**Antwoord.**

(a) Zij $f\colon \mathbb{N} \to X$ een dalende functie, en zij $B$ het beeld van $f$. Dan heeft $B$ een kleinste element, zeg $x$. Zij $n \in \mathbb{N}$ een element van het inverse beeld $f^{-1}(x)$. Dan geldt voor alle $m \geq n$ dat $f(m) \leq f(n) = x$. Omdat $x$ het kleinste element van $B$ is, en $f(m) \in B$, volgt $f(m) = x$. Dus $B$ is het beeld van de eindige verzameling $\{i \in \mathbb{N} \mid i \leq n\}$, en daarmee is $B$ eindig. $\square$

(b) Zij $f\colon X \to Y$ een dalende functie, en zij $B$ het beeld van $f$. Stel dat $B$ oneindig is. Definieer dan recursief

$$\begin{aligned} \iota\colon \mathbb{N} &\to B \\ 0 &\mapsto \min(B) \\ n+1 &\mapsto \min(B - \iota(\{0, \dots, n\})) \end{aligned}$$

Deze functie is wel-gedefinieerd en injectief, omdat is aangenomen dat $B$ oneindig is. Merk op dat $\iota$ een stijgende functie is.

Definieer vervolgens

$$\begin{aligned} g\colon \mathbb{N} &\to X \\ n &\mapsto \min(f^{-1}(\iota(n))) \end{aligned}$$

Merk op dat $g$ injectief is. Ook is $g$ dalend, omdat $f$ een dalende functie is. Uit deel (a) volgt dat $g$ een eindig beeld heeft. Tegenspraak. Dus is $B$ eindig. $\square$

(c) Rust $X$ uit met een wel-ordening door middel van de wel-ordeningstelling. Beschouw vervolgens $Y = X \times \mathbb{N}$ met de ordening

$$(x_1, n_1) \leq (x_2, n_2) \quad \text{als} \quad x_1 < x_2 \quad \text{of} \quad (x_1 = x_2 \wedge n_1 \leq n_2).$$

Dit is een wel-ordening: als $S$ een niet-lege deelverzameling is van $Y$, beschouw dan $x_0$ het kleinste element van $\{x \mid \exists n, (x, n) \in S\}$ en vervolgens $n_0$ het kleinste element van $\{n \mid (x_0, n) \in S\}$. Per constructie is $(x_0, n_0)$ een element van $S$. Het is ook het kleinste element: als $(x, n) \in S$, dan geldt $x \geq x_0$; en als $x = x_0$, dan geldt $n \geq n_0$.

De opvolger van een element $(x, n)$ is het element $(x, n+1)$; en dus is het element $(x, 0)$ een limietpunt, voor alle $x \in X$. Daarom is $X \to Y, x \mapsto (x, 0)$ een injectie van $X$ in de limietpunten van $Y$, hetgeen de gewenste ongelijkheid oplevert. $\square$

**Opgave 4 (nieuw blad!)** Zij $L$ de taal $(0, 1, +, \cdot, <)$ van geordende ringen. We beschouwen $\mathbb{R}$ op natuurlijke wijze als $L$-structuur. Ter herinnering: een verzameling $X \subseteq \mathbb{R}^n$ is *defineerbaar* als er een $L$-formule $\phi(v_1, \ldots, v_n)$ bestaat zodat

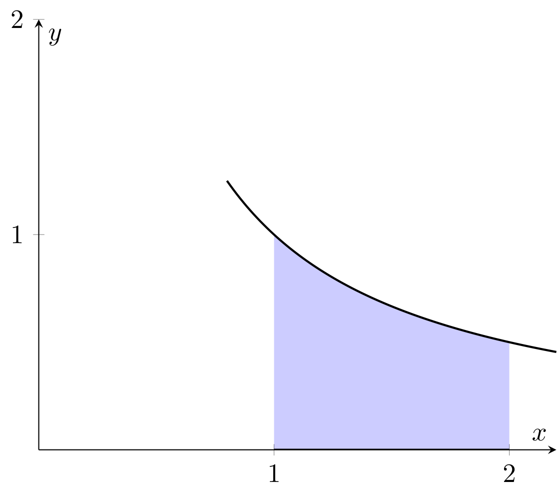
$$X = \{(x_1, \ldots, x_n) \mid \mathbb{R} \models \phi(x_1, \ldots, x_n)\}.$$

Een getal $x \in \mathbb{R}$ is een *periode* als het te schrijven is als verschil $\mathrm{vol}(X) - \mathrm{vol}(Y)$ van volumes van $L$-definieerbare verzamelingen $X$ en $Y$. Voorbeelden:

- een positief geheel getal $n$ is een periode, want het is het volume van $X = \{x \mid 0 \leq x \wedge x \leq n\}$.
- $\ln(2)$ is een periode, want het is het volume van $X \subseteq \mathbb{R}^2$ gegeven door

$$X = \{(x, y) \mid 1 \leq x \wedge x \leq 2 \wedge 0 \leq y \wedge x \cdot y \leq 1\}.$$

Het volume (i.e. oppervlakte) van $X$ wordt berekend door de integraal $\int_1^2 \frac{\mathrm{d}\,x}{x} = \ln(2)$. Zie ook de afbeelding hieronder.




Resultaten uit de integraalrekening mogen gebruikt worden zonder bewijs of verwijzing.

(a) (2 punten) Toon aan dat $-\sqrt{2}$ een periode is. (Denk aan het minteken! Volumes zijn positief.)
(b) (2 punten) Toon aan dat $\pi$ een periode is.
(c) (3 punten) Zij $f \in \mathbb{Z}[X]$ een polynoom met precies 3 verschillende nulpunten $\alpha < \beta < \gamma$ in $\mathbb{R}$. Laat zien dat $\{\beta\} \subseteq \mathbb{R}$ een $L$-definieerbare verzameling is, en concludeer dat $\beta$ een periode is.
(d) (3 punten) Bestaan er $x \in \mathbb{R}$ die geen periode zijn?

**Antwoord.**

(a) De verzameling $\{0\} \subseteq \mathbb{R}$ heeft volume 0. De verzameling $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \wedge x^2 \leq 2\}$ heeft volume $\sqrt{2}$. Het verschil van deze twee volumes is $-\sqrt{2}$, en dus is $-\sqrt{2}$ een periode. $\square$

(b) De verzameling $\{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ is een schijf met straal 1, en heeft dus oppervlakte (volume) $\pi \cdot 1^2 = \pi$. Dus $\pi$ is een periode. $\square$

(c) Schrijf het polynoom $f$ als $a_n X^n + \ldots + a_1 X + a_0$, met $a_i \in \mathbb{Z}$. Schrijf $\phi(x)$ voor de $L$-formule $a_n \cdot x^n + \ldots a_1 \cdot x + a_0 = 0$, waarbij de $a_i$ en $(\_)^n$ de gebruikelijke afkortingen zijn voor herhaald optellen/vermenigvuldigen. Definieer vervolgens de $L$-formule

$$\psi(y) = \phi(y) \wedge \exists x \exists z (x < y \wedge y < z \wedge \phi(x) \wedge \phi(z).$$

Dan is $\{y \in \mathbb{R} \mid \psi(y)\}$ per constructie een definieerbare verzameling, en gelijk aan $\{\beta\}$.

Als $\beta \geq 0$, dan volstaat het om te laten zien dat het interval $(0, \beta)$ volume $\beta$ heeft. Als daarentegen $\beta \leq 0$, dan volstaat het om te laten zien dat het interval $(\beta, 0)$ volume $-\beta$ heeft. We behandelen het eerste geval; het tweede is analoog. Inderdaad geldt de gelijkheid

$$(0, \beta) = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \wedge \exists \beta (\psi(\beta) \wedge x \leq \beta)\}.$$

Dus is $\beta$ een periode. $\square$

(d) De taal $L$ is eindig. Dus zijn er aftelbaar veel $L$-formules, en dus aftelbaar veel definieerbare verzamelingen. Dus zijn er ook aftelbaar veel perioden. $\square$

**Opgave 5 (nieuw blad!)** Voor de definitie van samenhangende grafen, zie opgave 2. Bewijs met behulp van de Compactheidsstelling dat er geen theorie in de taal $\{R\}$ (met 1 relatiesymbool) is die precies de *samenhangende grafen* definieert.

**Antwoord.** Stel dat $T$ een theorie in de taal $\{R\}$ is, die precies de samenhangende grafen definieert.

Zij $L$ de taal $(c_1, c_2, R)$ met twee constanten $c_1$ en $c_2$ en relatiesymbool $R$. Definieer de volgende $L$-formules

$$\phi_0 \stackrel{\text{def}}{=} (c_0 = c_1), \qquad \phi_1 \stackrel{\text{def}}{=} (c_0 R c_1 \vee c_1 R c_0),$$

en voor $n \in \mathbb{N}$

$$\phi_{n+2} \stackrel{\text{def}}{=} (\exists x_1 \exists x_2 \ldots \exists x_{n+1} (c_0 R x_1 \vee x_1 R c_0) \wedge (x_1 R x_2 \vee x_2 R x_1) \wedge \ldots \wedge (x_{n+1} R c_1 \vee c_1 R x_{n+1}))$$

Beschouw nu de theorie $T'$ gegeven door $T \cup \{\neg\phi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Dan is $T'$ inconsistent. Want stel dat $M$ een model is van $T'$, dan is $M$ ook een model van $T \subseteq T'$, en dus een samenhangende graaf. Maar $M \models \neg\phi_n$ betekent dat er geen pad van lengte $n$ bestaat tussen $c_0^M$ en $c_1^M$. Dus $T'$ heeft inderdaad geen modellen.

Uit de Compactheidsstelling volgt dat er een inconsistente eindige deeltheorie $T'' \subseteq T'$ bestaat. Zij $n$ het grootste getal zodat $\neg\phi_n \in T''$. Dan is een lineaire graaf met $n+1$ knopen een model van $T''$. Dus $T''$ is consistent, tegenspraak. Conclusie: de theorie $T$ bestaat niet. $\square$