

**FUNKTIONENTHEORIE 2021**  
**ÜBUNGSBLATT 9**

- **Deadline:** Donnerstag 01.07.2021 23:59
- Jede Übung ist 4 Punkte wert.
- **Wichtig!** Die Übungsblätter dürfen ab heute in Paare abgegeben werden.

1. **Übung.** Sei  $P = 0$ . Bestimmen Sie für die folgende Abbildungen ob  $P$  eine hebbare Singularität, ein Pol, oder eine wesentliche Singularität ist.

- (i)  $\frac{1}{z}$
- (ii)  $\sin \frac{1}{z}$
- (iii)  $\frac{1}{z^3} - \cos z$
- (iv)  $z \cdot e^{1/z} \cdot e^{-1/z^2}$

2. **Übung.** Seien  $f, g$  holomorph auf  $U - \{p\}$  ohne Nullstelle mit einer Singularität bei  $p$ .

Stellen sie jeweils eine Tabelle auf für die Addition, Multiplikation und Division mit Einträgen einem oder mehreren der Buchstaben H(ebbar), P(ol), W(esentlich), die angibt, welche Singularitäten für  $f + g$ ,  $fg$  und  $f/g$  in Frage kommen, wenn wir den Typ der Singularität für  $f$  und  $g$  vorgeben.

Beispiel:

+	H	P	W
H			
P	H,P		
W			

3. **Übung.** Berechnen Sie  $\text{Res}(f, p)$  für die folgende Fällen.

- (i)  $p = 2i, f(z) = \frac{z^2}{(z - 2i)(z + 3)}$
- (ii)  $p = i + 1, f(z) = \frac{e^z}{(z - i - 1)^3}$

4. **Übung.** Sei  $\partial D(P, r)$  ein Weg die Gegenuhrzeigersinn ein Kreis mit Radius  $r$  um  $P$  parametrisiert. Berechnen Sie

- (i)  $\frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial D(0,5)} f(z) dz$ , mit  $f(z) = \frac{z}{(z+1)(z+2i)}$ ,
- (ii)  $\frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial D(0,5)} f(z) dz$ , mit  $f(z) = \frac{e^z}{(z+1)\sin z}$ ,