FUNKTIONENTHEORIE 2021
ÜBUNGSBLATT 10

- **Deadline:** Donnerstag 08.07.2021 23:59
- Jede Übung ist 4 Punkte wert.
- **Wichtig!** Die Übungsblätter dürfen in Paare abgegeben werden.
- Es werden noch Tutoren für LA1, AN1, MathIng, dMathNatWiss, Algebra und Zahlentheorie für das Wintersemester gesucht.

1. **Übung** (6.1.16 im Skript)**.** Man zeige, daß für $U \subset \mathbb{C}$ offen und wegweise einfach zusammenhängend eine stetige komplexwertige Funktion $U \to \mathbb{C}$ harmonisch ist genau dann, wenn sie als Summe einer holomorphen Funktion mit einer antiholomorphen Funktion dargestellt werden kann.

2. **Übung** (6.2.11 im Skript)**.** Für alle nicht ganzen komplexen Zahlen $z \in \mathbb{C} - \mathbb{Z}$ gilt

$$\frac{1}{z} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{1}{z-k} + \frac{1}{z+k} \right) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}$$

Hinweis: Man addiere die alternierende und die nicht alternierende Summe.

3. **Übung** (6.2.12 im Skript)**.** Man zeige für alle natürlichen Zahlen $n \geq 0$ die Relation

$$\sum_{k \geq 0} (-1)^k (2k+1)^{-2n-1} \in \mathbb{Q}\pi^{2n+1}$$

(Für einen Hinweis, siehe Skript.)

4. **Übung** (6.3.8 im Skript)**.** Für jede holomorphe Funktion f ohne Nullstellen mit wegweise einfach zusammenhängenden Definitionsbereich und jedes $n \geq 1$ gibt es eine holomorphe Funktion g mit demselben Definitionsbereich und mit der Eigenschaft $g(z)^n = f(z)$ für alle Punkte z aus dem Definitionsbereich.