

FUNKTIONENTHEORIE 2021
ÜBUNGSBLATT 1

- **Deadline:** Donnerstag 29.04.2021
- Jede Übung ist 4 Punkte wert. Insgesamt gibt es 16 Punkte.

1. **Übung.** Berechnen Sie Realteil und Imaginärteil einer Quadratwurzel von $1 + i$.
2. **Übung** (1.1.15 im Skript). Eine Teilmenge von $\mathbb{C} \sqcup \{\infty\}$ heißt ein *verallgemeinerte Kreis*, wenn sie entweder ein Kreis

$$K(a; r) := \{z \in \mathbb{C} \mid |z - a|^2 = r^2\}$$

ist für $a \in \mathbb{C}$ und $r > 0$ oder aber eine reelle affine Gerade vereinigt mit dem Punkt ∞ . Man prüfe, daß die Selbstabbildung von $\mathbb{C} \sqcup \{\infty\}$ mit $z \mapsto z^{-1}$ für $z \in \mathbb{C}^*$ und $0 \mapsto \infty$ und $\infty \mapsto 0$ verallgemeinerte Kreise in verallgemeinerte Kreise überführt.

3. **Übung.** Es gibt keine stetige Abbildung $c : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^*$ mit $c(z)^3 = z$, also keine stetige dritte Wurzel. (Hinweis: Bei den Hinweisen zu 1.2.11 spickeln.)
4. **Übung.** Zeigen Sie, dass die Formel

$$\log(u + iv) = \log \sqrt{u^2 + v^2} + i \frac{\pi}{2} - i \arctan \frac{u}{v} \quad (v > 0)$$

aus 1.2.8 wirklich eine Umkehrfunktion für $\exp : \mathbb{R} + (0, \pi)i \rightarrow \mathbb{C}^*$ gibt.